极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在的积分证明

叶卢庆

浙江省温州市永嘉县上塘镇环城东路 44 号, 邮编: 325100

摘要：利用积分理论, 给出了极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在的一个新证明.

关键词：数学分析; 极限; 自然对数; 积分

中图分类号： O172

A Proof of the Existence of the Limit $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ Via Integral

Luqing Ye

Address Number 44, Huancheng East Road, Shangtang Town, Yongjia County, Wenzhou City, Zhejiang Province, 325100

Abstract: We give a new proof of the existence of the limit $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ by using the theory of integration.

Key words: Mathematical Analysis, Limit, Natural Logarithm, Integral

极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在, 是数学分析中一个众所周知的事实. 有不少的数学分析教材将其作为自然对数 e 的定义. 为了证明 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在, 通常是先证明数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调递增, 再证明其有上界, 于是由实数理论中的定理"单调有界数列必有极限"便得出极限存在. 比如文献 [1] 便是通过将 $(1+\frac{1}{n})^n$ 二项式展开而看出其既是单调递增的, 又是有上界的. 当然, 也有人使用均值不等式来证明 $(1+\frac{1}{n})^n$ 单调递增, 比如见文献 [2]. 也有教材使用 Bernoulli 不等式, 来证明数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调递增, 数列 $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ 单调递减, 而且由于数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 和 $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ 极限相同, 因此可得极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在, 比如见文献 [3].

下面, 我们却要直接利用 Riemann 积分的相关理论来证明极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在. 如图 1 所示, 是个平面直角坐标系. 在坐标平面上构造 n 个紧邻的矩形. 每个矩形的底边位于 x 轴上. 每个矩形的左上角顶点位于曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上. 且每个矩形的面积都相同, 为 $\frac{1}{n}$. 所有矩形的面积和为 1. 矩形 1 的左下角顶点 A_0 的横坐标为 1. 则为了使得每个矩形的面积都为 $\frac{1}{n}$, 经由归纳法可得, 对于一切 $0\leq i\leq n-1$, 矩形 $i+1$ 的左下角顶点 A_i 的横坐标为 $(1+\frac{1}{n})^i$. 且为了使得矩形 n 的面积为 $\frac{1}{n}$, 点 A_n 的横坐标必须为 $(1+\frac{1}{n})^n$. 为了接下来的用途, 我们把第 n 个矩阵右下角的顶点 A_n 记为 L_n.

我们先来证明,

引理 1. 集合 $\{L_n : n\in\mathbf{N}\}$ 是一个有界点集.

作者简介： 叶卢庆 (1992-), 男, 本科毕业于杭州师范大学理学院, 数学与应用数学 (师范) 专业.Email:yeluqing@blogmath.org

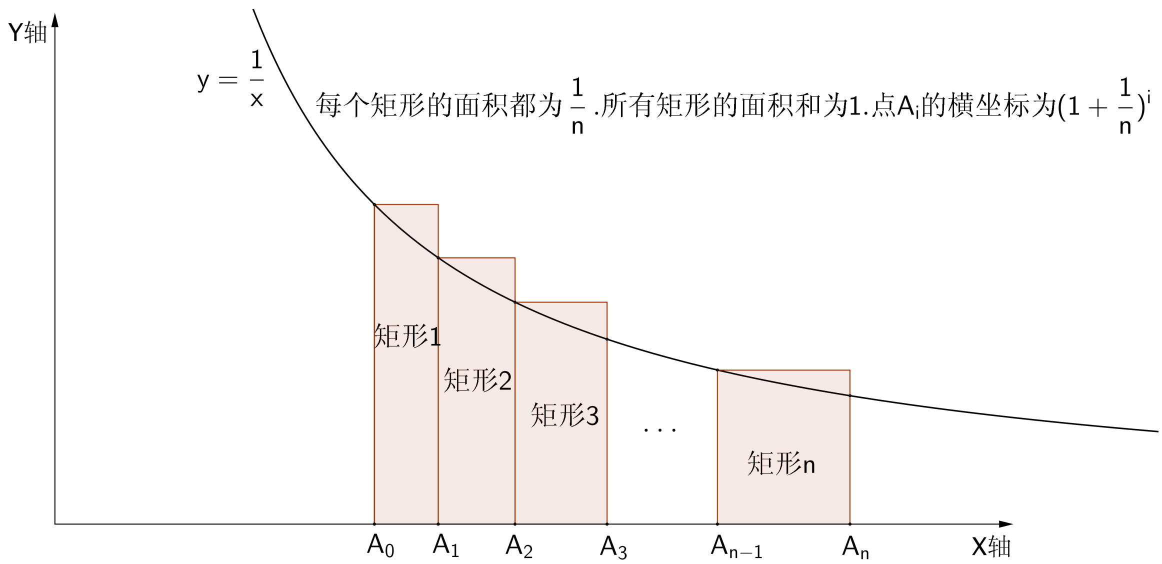

图 1

证明. 假若 $\{L_n : n \in \mathbf{N}\}$ 不是一个有界点集, 则对于任意给定的足够大的正实数 M, 都存在 $N \in \mathbf{N}$, 使得 L_N 的横坐标大于 M. 从矩形的构造过程易得所有矩形 $1, 2, \ldots, N$ 的面积之和会大于 $\int_1^M \frac{1}{x}\mathrm{d}x$. 然而我们知道所有矩形的面积和总是 1, 但 $\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 却发散到正无穷, 因此矛盾. 可见, $\{L_n : n \in \mathbf{N}\}$ 是有界点集. □

在 $\{L_n : n \in \mathbf{N}\}$ 是有界点集的基础上, 我们再来证明,

引理 2. *n 个矩形中, 每个矩形的宽度都会随着 n 趋于正无穷而无限趋于 0.*

证明. 假若无论 n 多大, 都存在某个固定的正实数 ε, 使得 n 个矩形中总有某个矩形, 它的宽度是大于 ε 的. 由于任意一个矩形的面积始终为 $\frac{1}{n}$, 这会导致该矩形的高度小于 $\frac{1}{n\varepsilon}$. 令 $n \to \infty$, 则意味着总有一个矩形的高度会随着 n 趋于正无穷而无限趋于 0, 这与集合 $\{L_n : n \in \mathbf{N}\}$ 的有界性 (引理 1) 矛盾. 因此当 $n \to \infty$ 时, n 个矩形中, 每个矩形的宽度都会无限趋于 0. □

最后, 我们来证明,

定理. *点 L_n 的横坐标 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 会随着 n 趋于正无穷而无限趋于 t, 其中 t 是唯一的使得 $\int_1^t \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1$ 的实数.*

证明. 假如无论对于多么大的 n, 总存在正整数 $N > n$, 使得 L_N 的横坐标大于 $t + \epsilon_1$, 其中 ϵ_1 是某个固定的正实数, 则当 $n \to \infty$ 时, 由于 n 个矩形中的每个矩形宽度都无限趋于 0(引理 2), 这就将区间 $[0, t]$ 进行了精细的分割. 根据 Riemann 积分的理论, 位于区间 $[0, t]$ 部分的所有矩形的面积和将随着 $n \to \infty$ 而无限趋于 1. 再加上不在区间 $[0, t]$ 上的一部分矩形, 可得 N 个矩形的面积和会大于 1. 这与 N 个矩形的面积和始终为 1 矛盾.

假如无论对于多么大的 n, 总存在正整数 $N > n$, 使得 L_N 的横坐标小于 $t - \epsilon_2$, 其中 ϵ_2 是某个固定的正实数. 则令 $n \to \infty$, 此时 N 个矩形的面积和会无限趋于 1, 而在 n 足够大时 $\int_1^t \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 显然会大于 N 个矩形的和, 即 $\int_1^t \frac{1}{x}\mathrm{d}x > 1$. 这与 $\int_1^t \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1$ 矛盾.

综合上面两段的论证, 可得 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = t$. □

参考文献（References）

[1] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程 (第一卷)[M]. 杨弢亮, 叶彦谦译. 北京: 高等教育出版社, 2006: 60-61.

[2] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程 (上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 33.

[3] 卓里奇. 数学分析 (第一卷)[M]. 蒋铎, 王昆扬, 周美珂, 邝荣雨译. 北京: 高等教育出版社, 2006: 76.