用拆分函数法探索二次函数零点与系数的关系

江战明

(浙江省德清县高级中学, 浙江　湖州　313200)

说起二次函数零点分布与系数之间的关系, 大家首先想到的可能是图像法——根据该函数图像的位置, 写出函数所需满足的一些条件, 化简这些条件得到二次函数系数所需满足的约束条件. 其实, 解决此类问题除了上述方法, 还可以通过拆分函数, 观察拆分后的函数图像快速解题. 下面分别以单参数、双参数问题为例, 对拆分函数方法作具体说明.

1　单参数二次函数零点分布与系数关系

若二次函数的系数中只有一个参数, 则其零点分布与系数的取值范围问题一般首选图像法, 或者利用韦达定理, 将零点的分布情况转化为系数的约束条件. 虽然二次函数零点分布与系数关系的问题几乎都可以用图像法解决, 但有些问题需分类讨论的情况比较多, 显得解题过程比较复杂; 虽然利用韦达定理时解题过程比较简洁, 但在缺乏直观的情况下兼顾两个根的联动变化, 增加了问题的抽象程度. 此时, 拆分函数的方法是一种值得尝试的方法.

例1　已知二次函数 $f(x)=x^2+x+a$, 若 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有两个不同的零点, 则 a 的取值范围是____.

解法1 (拆分函数): 设 $g(x)=x+a$, $h(x)=-x^2$, 因为 $g(0)=a$, 因此 $g(x)=x+a$ 的图像是斜率为1且过点 $(0,a)$ 的一族平行直线(见图1). 要使 $g(x)=x+a$ 与 $h(x)=-x^2$ 的图像

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

y 上, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解答: 因为 $a_{n+1}-a_n=k^n(b_{n+1}-b_n)=k^n(a_{n+1}^2-a_n^2)$, $a_{n+1}\neq a_n$, 所以 $a_{n+1}+a_n=\dfrac{1}{k^n}$.

即 $n\geqslant 3$ 时, $\begin{cases} a_n+a_{n-1}=\dfrac{1}{k^{n-1}}, \\ a_{n-1}+a_{n-2}=\dfrac{1}{k^{n-2}}, \end{cases}$ 得 $a_n-a_{n-2}=\dfrac{1-k}{k^{n-1}}$, 且 $a_1=0$, $a_2=\dfrac{1}{k}$.

① 当 n 为偶数时, $a_n=(a_n-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-4})+\cdots+(a_4-a_2)+a_2=(1-k)\left(\dfrac{1}{k^{n-1}}+\dfrac{1}{k^{n-3}}+\cdots+\dfrac{1}{k^3}\right)+\dfrac{1}{k}=-\dfrac{1}{k(1+k)}\left(1-\dfrac{1}{k^{n-2}}\right)+\dfrac{1}{k}$.

② 当 n 为奇数时, $a_n=(a_n-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-4})+\cdots+(a_3-a_1)+a_1=(1-k)\left(\dfrac{1}{k^{n-1}}+\dfrac{1}{k^{n-3}}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}\right)=-\dfrac{1}{1+k}\left(1-\dfrac{1}{k^{n-1}}\right)$.

$$综上, a_n=\begin{cases} \dfrac{1}{k(1+k)}\left(\dfrac{1}{k^{n-2}}-1\right)+\dfrac{1}{k}, & n=2m, m\in \mathbf{N}^*, \\ \dfrac{1}{1+k}\left(\dfrac{1}{k^{n-1}}-1\right), & n=2m-1, m\in \mathbf{N}^*. \end{cases}$$

小结: 1. 我们对这道数列压轴题的探究和变式是沿着对问题的推广 (特殊到一般) 和类比 (特殊到特殊) 的思路进行的.

2. 在变式中, 当出现相邻两项差、相邻两项和 (化成隔项差), 通常利用叠加法求通项; 相邻三项的问题通常化成相邻两项的问题来求解. 已知通项求数列最大项或最小项, 通常利用函数单调性和数列单调性来求解. 当通项不明确时, 有时需对其中的参数或奇、偶项进行分类讨论.
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

在$[-1,1]$上有两个不同交点，则必有$a\in\left[0,\frac{1}{4}\right)$.

解法2(韦达定理)：设函数的两个零点分别为x_1、x_2，不妨设$x_1<x_2$，因为x_1、$x_2\in[-1,1]$且由韦达定理知$x_1+x_2=-1$，所以有$x_1\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right)$. 又因为$a=x_1\cdot x_2=x_1(-1-x_1)$, $x_1\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right)$，所以$a\in\left[0,\frac{1}{4}\right)$.

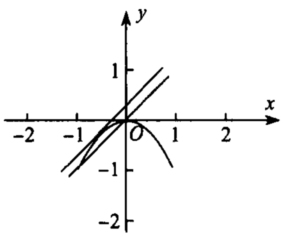

图1

评析：此题属于典型的零点分布与系数关系问题，有多种方法可解决此题. 用韦达定理时容易受阻于x_1范围，用图像法时要同时关注图像顶点和定义域边界处的函数值，而拆分函数后关注直线与抛物线的交点，显得更直观，更简洁.

例2　已知二次函数$f(x)=x^2+ax+2$，若$f(x)$在区间$[0,\ 3]$上只有一个零点，则a的取值范围是____.

解法1(拆分函数)：设$g(x)=ax+2$, $h(x)=-x^2$，因为$g(0)=2$，所以$g(x)$是过点$(0,\ 2)$，斜率为a的直线束(见图2)，要使它们的图像在$[0,\ 3]$上只有一个交点，则需考虑“图像有交点”和“定义域范围”，通过计算，可得$a\in\left(-\infty,-\frac{11}{3}\right)$或$a=-2\sqrt{2}$.

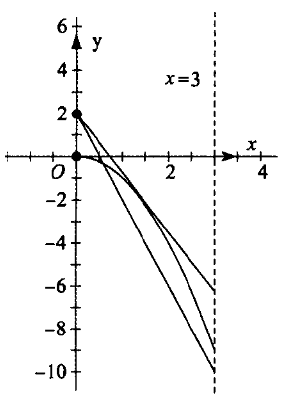

图2

解法2(韦达定理)：设函数$f(x)$两个零点分别为x_1、x_2，不妨设$x_1\in[0,3]$，则$x_2=x_1$或$x_2\notin[0,3]$.

若$x_2=x_1$，则有$x_1^2=2$，且$a=-2x_1(x_1\in[0,3])$，得$a=-2\sqrt{2}$.

若$x_2\neq x_1$且$x_2\notin[0,3]$，由于$x_1\cdot x_2=2$，故当$x_2\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$时，可解得$x_1\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{2}{3}\right)$，所以$x_1$的实际范围为$\left(0,\frac{2}{3}\right)$. 因为$a=-\left(\frac{2}{x_1}+x_1\right)\left(x_1\in\left(0,\frac{2}{3}\right)\right)$，所以$a\in\left(-\infty,-\frac{11}{3}\right)$. 综上可得$a\in\left(-\infty,-\frac{11}{3}\right)$或$a=-2\sqrt{2}$.

评析：从解法2可见，若用韦达定理处理本题，要同时关注一个零点在所给区间上，而另一个零点不在该区间上，还要关注定义域，显然没有拆分函数的方法那么直观.

例3　已知二次函数$f(x)=mx^2-(m-1)x+m-7=0$有两个零点x_1、x_2，且满足$-1<x_1<0$, $0<x_2<1$，则m的取值范围是____.

解法1(拆分函数)：设$g(x)=\frac{m-1}{m}x-\frac{m-7}{m}$, $h(x)=x^2$.

因为$g(7)=6$，所以$g(x)$的图像是过点$(7,\ 6)$的直线束，要使$g(x)$与$h(x)$的图像在区间$(-1,0)$和$(0,1)$上各有一个交点(见图3)，容易看出，是在直线$g(x)$扫过$(0,0)$到$(1,1)$的过程中，计算得$m\in(6,7)$.

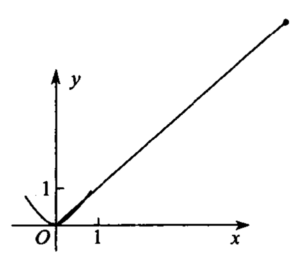

图3

解法2(韦达定理)：由韦达定理可知$x_1+x_2=\frac{m-1}{m}$, $x_1\cdot x_2=\frac{m-7}{m}$，消去$m$即可得$7x_1+7x_2-x_1x_2=6$，即$x_2=\frac{6-7x_1}{7-x_1}$. 由$0<x_2<1$，解得$-\frac{1}{6}<x_1<\frac{6}{7}$. 又因为$-1<x_1<0$,

所以 $-\frac{1}{6} < x_1 < 0$. 再由 $f(x)$ 得 $m = \frac{7-x_1}{1-x_1+x_1^2}$, 解得 $m \in (6,7)$.

评析: 由本题可见, 在系数比较复杂的情况下, 用韦达定理显得比较抽象且繁琐, 而拆分函数的方法思路比较简洁.

2　双参数二次函数零点分布和系数的关系

例 4　设函数 $f(x) = x^2 + 2bx + c$ 在 $[-1, 1]$ 上有两个零点, 且 $0 \leqslant 4b + c \leqslant 3$, 则 b 的取值范围是____.

解法 1: 根据二次函数图像和已知条件可得 $\begin{cases} f(-1)\geqslant 0, \\ f(1)\geqslant 0, \\ -1\leqslant -b\leqslant 1, \\ \Delta\geqslant 0, \\ 0\leqslant 4b+c\leqslant 3, \end{cases}$ 化简后得 $\begin{cases} 1-2b+c\geqslant 0, \\ 1+2b+c\geqslant 0, \\ -1\leqslant b\leqslant 1, \\ b^2-c\geqslant 0, \\ 0\leqslant 4b+c\leqslant 3, \end{cases}$

解该不等式组得 $0 \leqslant b \leqslant \frac{2}{3}$.

评析: 这样的处理看似简单, 其实信息的分析、转化和计算的工作量是很大的. 若能拆分函数, 并把 $4b+c$ 看成某一函数的值, 解题过程就比较简单.

解法 2 (拆分函数): 设 $g(x) = 2bx+c$, $h(x) = -x^2$. 因为 $g(2) = 4b + c \in [0,3]$, 所以直线 $g(x)$ 过点 $(2, 4b+c)$, 斜率等于 $2b$. 要使直线与抛物线 $h(x) = -x^2$ 在 $[-1,1]$ 内有两个交点, 观察图 4 可知, 当直线过点 $(2,0)$ 且与抛物线相切时斜率最小, 当直线过点 $(2, 3)$ 和 $(-1,-1)$ 时斜率为最大, 即 $0 \leqslant 2b \leqslant \frac{3-(-1)}{2-(-1)}$, 化简得 $0 \leqslant b \leqslant \frac{2}{3}$.

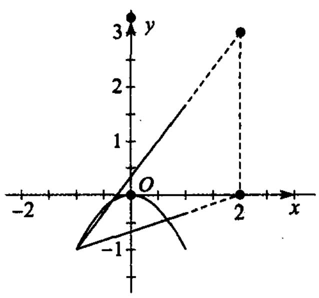

图 4

例 5　已知函数 $f(x) = x^2 + bx + c(b, c \in \mathbf{R})$ 在 $[-1,1]$ 上有零点, 且满足 $0 \leqslant c - 2b \leqslant 1$, 求 c 的取值范围.

解法 1 (规划法): 因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有零点, 且 $0\leqslant c-2b\leqslant 1$, 所以 $\begin{cases} f(-1)\cdot f(1)\leqslant 0, \\ 0\leqslant c-2b\leqslant 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \Delta\geqslant 0, \\ f(1)\geqslant 0, \\ f(-1)\geqslant 0, \\ 0\leqslant c-2b\leqslant 1. \end{cases}$ 通过线性规划法可得 $-3 \leqslant c \leqslant 9-4\sqrt{5}$.

解法 2 (拆分函数): 设 $g(x) = bx + c$, $h(x) = -x^2$. 因为 $g(-2) = c - 2b$, 即直线 $g(x)$ 过点 $(-2, c-2b)$, 截距为 c, 其中 $c - 2b \in [0,1]$. 要使直线 $g(x)$ 与抛物线 $h(x) = -x^2$ 在 $[-1,1]$ 内有交点, 观察图 5 可知, 当直线过点 $(-2,1)$ 和 $(-1,-1)$ 时只有一个交点, 在 y 轴上有最小截距 $c = -3$; 当直线过点 $(-2,0)$ 且与抛物线相切时, 在 y 轴上的有最大截距 $c = 9-4\sqrt{5}$, 所以有 $-3 \leqslant c \leqslant 9-4\sqrt{5}$.

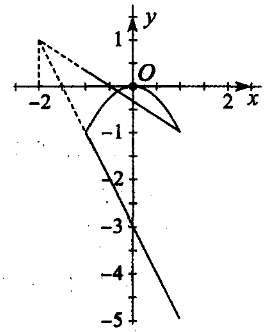

图 5

例 6　设二次函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 在 $x \in [0,1]$ 上有两个不同的零点, 则 $2a+b$ 的范围____.

解法 1 (规划法): 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有两个不同的零点, 所以有 $\begin{cases} f(0)\geqslant 0, \\ f(1)\geqslant 0, \\ \Delta>0, \end{cases}$ 化简得 $\begin{cases} b\geqslant 0, \\ 1+a+b\geqslant 0, \\ a^2-4b>0, \end{cases}$ 通过规划方法可得 $-3 < 2a+b < 0$.

解法 2 (拆分函数): 设 $g(x) = ax + b$, $h(x) = -x^2$, 显然直线 $g(x) = ax + b$ 经过点 $P(2, 2a+b)$ (见图 6). 要使直线 $g(x)$ 与抛物线在 $[0,1]$ 上有两个交点, 先将直线 $g(x) = ax+b$ 与 $h(x) = -x^2$ 在 $x \in [0,1]$ 时相切, 则两曲线存在两个相同的交点, 然后把直线稍往下移, 两曲线就有两个不同交点. 显然当直线与抛物线分别相切在 $(0, 0)$ 和 $(1,-1)$ 时为临界位置, 此时点 P 的纵坐标分别为 0 和 -3, 所以 $-3 < 2a+b < 0$.

(下转第 4-40 页)

证法7: 令$x=\tan\dfrac{A}{2}$, $y=\tan\dfrac{B}{2}$, $z=\tan\dfrac{C}{2}$, 则$xy+yz+zx=1$, 且$\sin A=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $\sin B=\dfrac{2y}{1+y^2}$, $\sin C=\dfrac{2z}{1+z^2}$.

于是, 要证$\sin A+\sin B+\sin C>2$, 即证$\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{2y}{1+y^2}+\dfrac{2z}{1+z^2}>2$.

因为$1+x^2=(x+y)(x+z)$,$1+y^2=(y+x)(y+z)$, $1+z^2=(z+x)(z+y)$, 故也就是证$\dfrac{4}{(x+y)(y+z)(x+z)}>2$, 即$(x+y)(y+z)(x+z)<2$.

因为$(x+y)(y+z)(x+z)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$, 于是只需证明$x+y+z-xyz<2$.

因为$\dfrac{A}{2}$、$\dfrac{B}{2}$、$\dfrac{C}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, 故$x$、$y$、$z\in(0,1]$, 所以$(1-x)(1-y)(1-z)\geqslant 0$, 即$1-(x+y+z)+(xy+yz+xz)-xyz\geqslant 0$, 此式即为$x+y+z+xyz\leqslant 2$. 注意到等号不能成立, 故原不等式得证.

评注: "万能公式"代换是将三角问题转化为代数问题的一种重要途径. 本解法正是巧妙运用这一途径, 将相对陌生的三角不等式转化为条件代数不等式, 并结合分析法一步步地证得该等价代数不等式.

证法8: 设$\triangle ABC$的三边长为a、b、c, 外接圆半径为R, 则由正弦定理知欲求证不等式可等价于$a+b+c>4R$.

作出$\triangle ABC$及其外接圆, 不妨设$a=BC$为最长边, 平移$\triangle ABC$及其外接圆为$\triangle A_1B_1C_1$及其外接圆, 使得点B_1重合于点C, 点C_1在BC的延长线上, 如图1所示. 记两等圆的另一交点为D, 则$\angle BDC=\angle C_1DC$, 且$BC=CC_1$. 故$DB=DC_1$, $DC\perp BC_1$, DB和DC_1分别为两圆的直径. 再由$\triangle ABC$为锐角三角形可知点D在凸四边形ABC_1A_1内, 于是$AB+AA_1+A_1C_1>DB+DC_1$, 即$a+b+c>4R$.

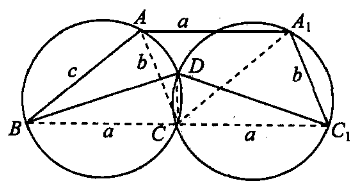

图1

评注: "正弦定理"将三角不等式转化为几何不等式, 然后联想其几何构造. 证得直观、简洁. 一张图, 无需语言, 即深刻而简洁地刻画出了丰富的内涵.

一道好题, 犹如一块璀璨的碧玉, 折射出人类智慧的光辉; 多种解法, 犹如一弯绚丽的彩虹, 撑起一片湛蓝的天空. "一题多解"的教学和实际训练, 对活化学生知识结构及激发学生学习数学的兴趣至关重要, 在我们的日常教学中应给予足够的重视!

(上接第4-24页)

从上述例题可见, 对于含参数的二次函数零点分布与系数的关系问题, 我们通常运用线性规划的思想方法求解, 有时解题过程比较繁琐, 计算量较大. 而本文介绍的拆分函数方法, 能把问题显示的更直观, 思想方法更简洁, 更灵活, 且计算量小, 是值得大家重视的一种方法.

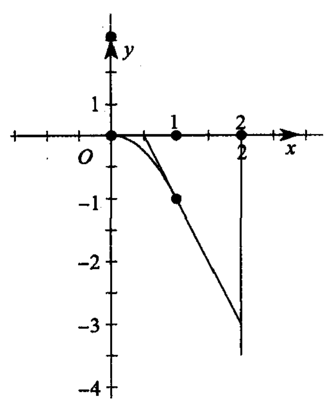

图6